بنام خدا:

امتحان ۹۰/۸/۱۸:

پروژه ها {
حتماً با نرم افزاری کمی کنم:
مبنای mathematica را ازین بگیرید
هفته بعد
}

ادامه حل مدار با لاپلاس:

$L \longrightarrow Ls$ ✓

$C \longrightarrow \frac{1}{Cs}$ ✓

$R \longrightarrow R$ ✓

وابسته ⟶ وابسته ✓

مستقل ⟶ لاپلاس

سخت

⟹ مدار DC ✓

⇓

تبدیل منابع
تقسیم جریان و ولتاژ
KCL, KVL ✓

لاپلاس معکوس

سخت

پس لاپلاس گرفتن و لاپلاس معکوس گرفتن مهم‌ترین نکته است. باقی مراحل سخت نیست

$$e^{at} f(t)$$

اثبات:

$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = \int_0^\infty \left(e^{at} f(t)\right) e^{-st}\, dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \xrightarrow[\text{بالا}]{\text{با توجه به}} F(s-a)$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$ می دانیم

استفاده از رابطه بالا به صورت فارسی:

اگر در تابعی e^{at} داشتیم، برای لاپلاس گرفتن

ابتدا e^{at} را درنظر نمی گیریم. از تابع لاپلاس می گیریم. در آخر هرجا s داشتیم، s-a می گذاریم:

مثال: $\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t] = ?$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin 3t] = \mathcal{L}[\sin 3t]\Big|_{s \to s-(-2)} =$$

$$\frac{3}{s^2+9}\Big|_{s \to s+2} = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

هر فرمولی که می نویسیم (از اینجا به بعد) یکی استفاده برای لاپلاس گرفتن دارد یکی استفاده برای لاپلاس معکوس. برای هر دو حالت تمرین لازم است.

اگر از تابع لاپلاس معکوس خواستیم بگیریم

می‌توان در $F(s)$ هرجا s بود $s+a$ گذاشت و

فقط در آخر در e^{at} ضرب کرد

یا

یکی e^{at} به بیرون انتقال داده

معمولاً موقعی که مخرج درجه ۲ باشد و درجه ۱ هم داشته باشد ابتدا مخرج را تبدیل به مربع کامل می‌کنیم و سپس از رابطه بالا استفاده می‌کنیم.

مثال: $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right]$ ؟

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+2)^2+1}\right] =$$

$$s \longrightarrow s-2$$

$$e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+1}\right] =$$

(بدون اگر مخرج درجه ۲
درجه ۱ باشد
صورت را جدا می کنیم)

$$e^{-2t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s^2+1}\right]\right) =$$

$$e^{-2t}\left(\cos t - 2\sin t\right)$$

تعبیر مارس (s) : $\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

اگر از $t^n f(t)$ خواستیم لاپلاس بگیریم، ابتدا
t^n را حذف می کنیم و از باقی لاپلاس می گیریم و (n)
بار مشتق گرفته و در $(-1)^n$ ضرب می کنیم

$f(t)$	$F(s)$	
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	

$$s^{۲} + as + b = \left(s + \frac{a}{۲}\right)^{۲} + b - \frac{a^{۲}}{۴}$$

نصف

$e^{-۲t} \mathcal{L}^{-}$

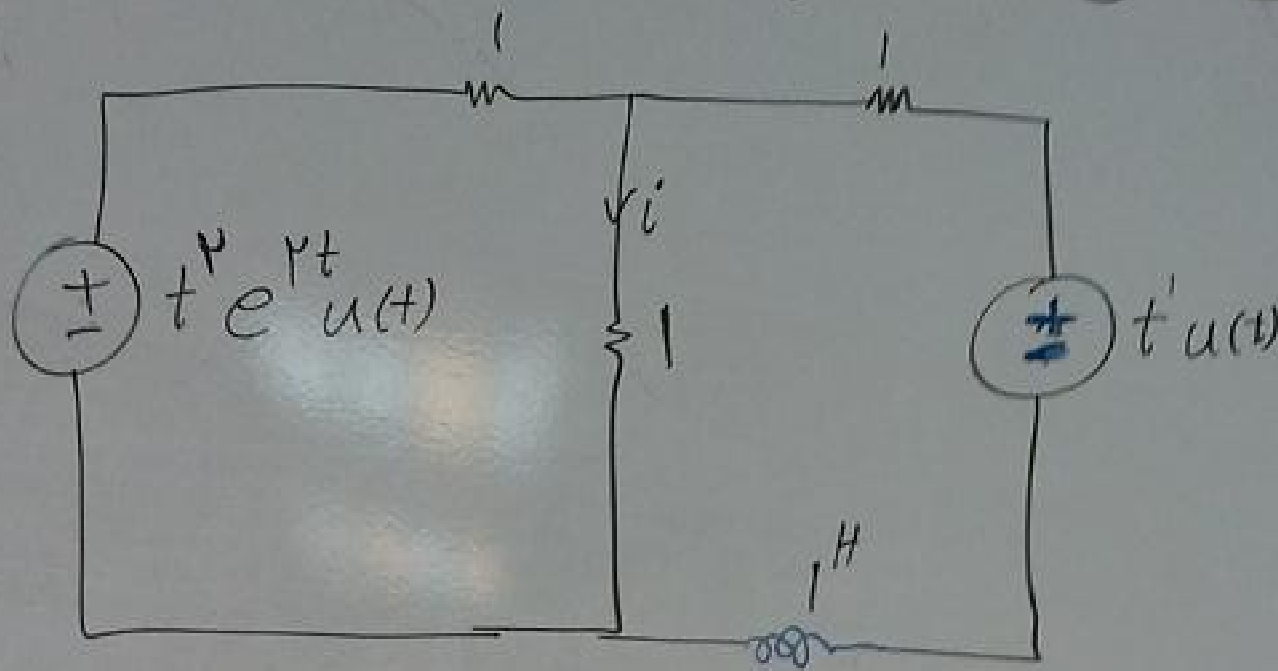
$e^{-۲t}$

$e^{-۲t}$

۱

(n)

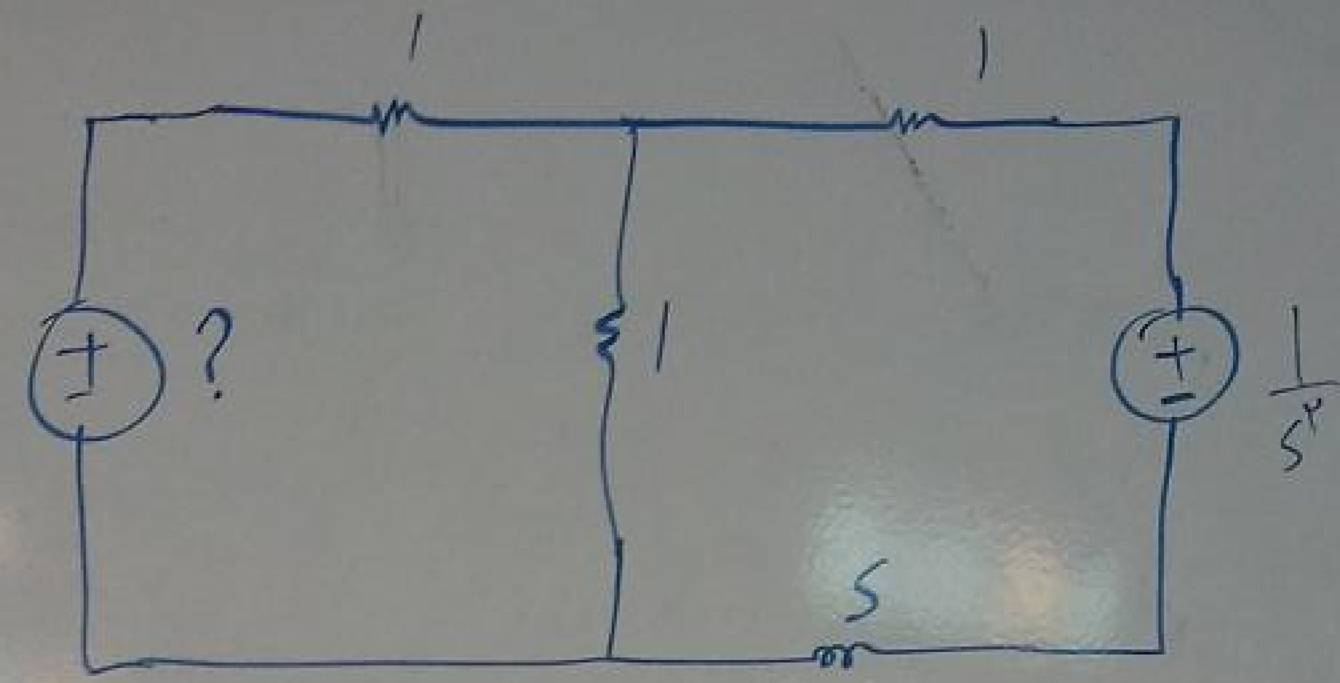
مثال: در مدار زیر جریان i چند است؟



حل: شرایط اولیه صفر است.

نکته: اگر سلف 1H نبود، مدار گذرا داشتیم که همه مقاومت بود. پس می توانستیم بدون لاپلاس گرفتن مدار را حل کنیم. حال که سلف داریم باید از لاپلاس حل کنیم.

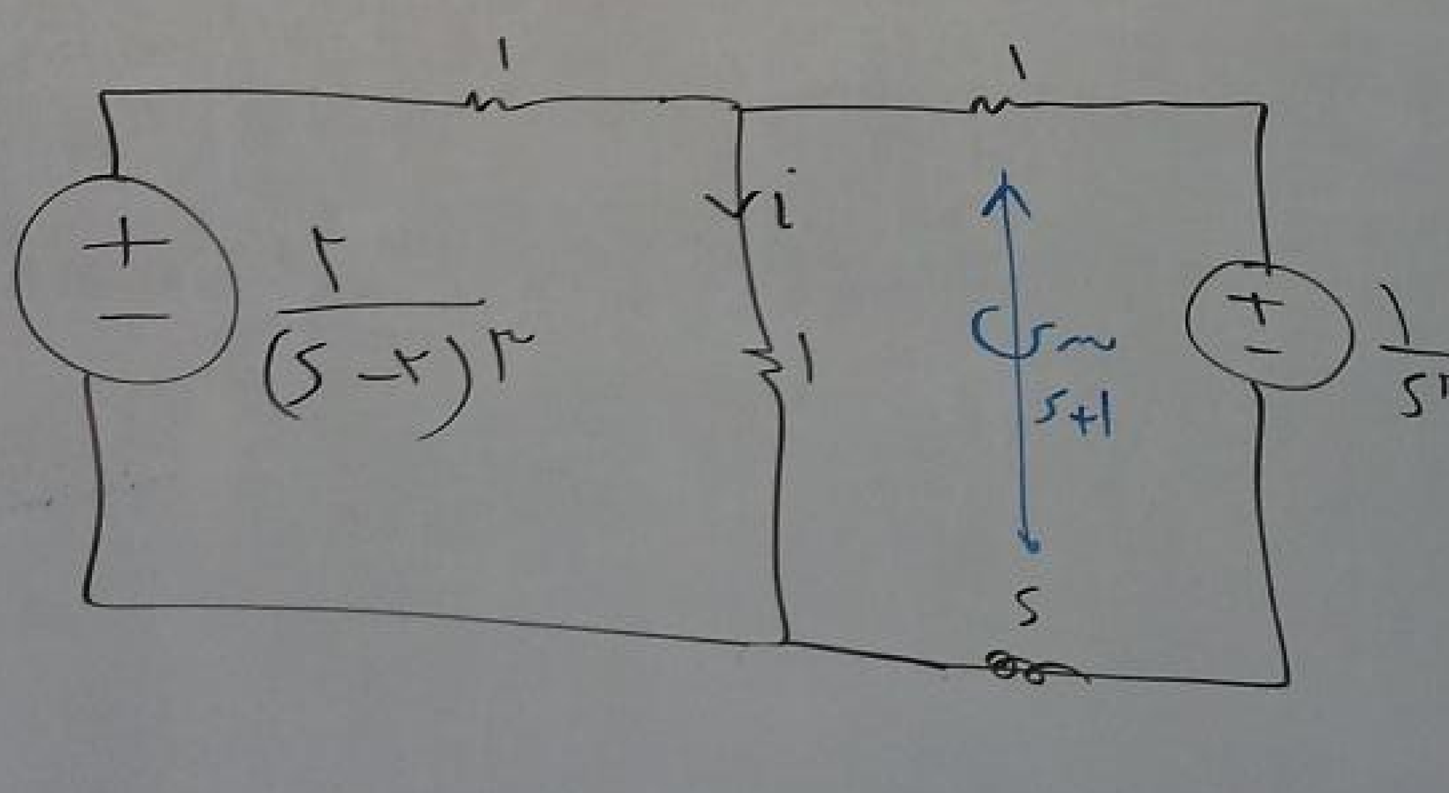
-Dc



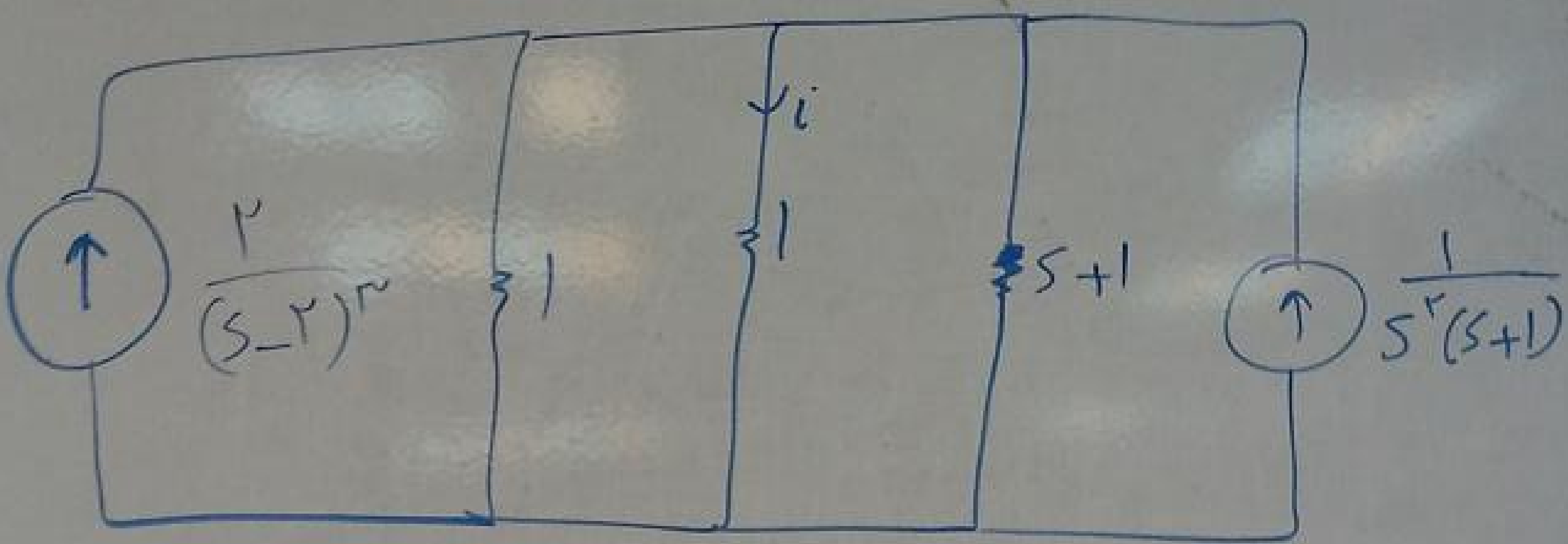
$\frac{1}{(s+1)}$

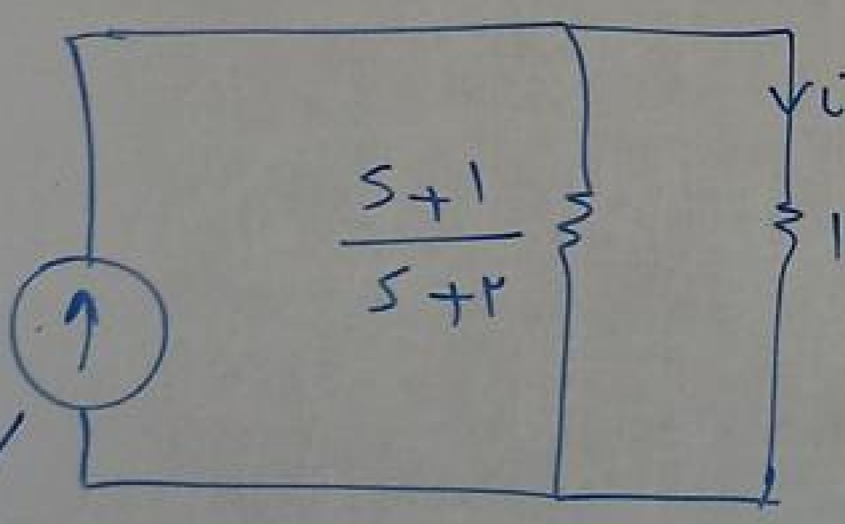
$$?: \mathcal{L}\left[t^{۲} e^{۲t}\right] = (-1)^{۲}\left(\mathcal{L}\left[e^{۲t}\right]\right)'' = \left(\frac{1}{s-۲}\right)'' =$$

$$\left(\frac{-1}{(s-۲)^{۲}}\right)' = \frac{۲}{(s-۲)^{۳}}$$



DC شد، تقسیم جریان
تبدیل منابع ✓
KCL, KVL





$$\frac{2}{(s-2)^3} + \frac{1}{s^2(s+1)}$$

تقسیم جریان

$$i=\left(\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\times\frac{\frac{s+1}{s+2}}{\frac{s+1}{s+2}+1}\Rightarrow$$

$$i=\left(\frac{2}{(s-2)^3}+\frac{1}{s^2(s+1)}\right)\times\frac{s+1}{2s+3}$$

$$i=\frac{(s+1)}{(s-2)^3\,(s+\frac{3}{2})}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2(s+\frac{3}{2})}$$

$$i=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s-2)^3(s+\frac{3}{2})}+\frac{\frac{1}{2}}{s^2(s+\frac{3}{2})}\right]$$

باید تفکیک کسرها برویم:

$$\frac{s+1}{(s-2)^3\left(s+\frac{3}{2}\right)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{(s-2)^2}+\frac{C}{(s-2)^3}+\frac{D}{s+\frac{3}{2}}$$

اگر توانی بالاتر از ۱ داشتیم مثلاً در بالا $s-2$ به توان ۳ داریم،
۳ کسر با مخرجهای $s-2$ ، $(s-2)^2$ و $(s-2)^3$ می‌گذاریم.
کسر اول چون درجه ۱ است صورتش درجه صفر یعنی A باشد، دو کسر دیگر هم باید درجه صفر باشند یعنی B و C.

برای D و C می توان روش تستی را رفت ولی
برای A و B باید مخرج مشترک گرفت.

$$D=\frac{s+1}{(s-2)^3\cancel{\left(s+\frac{3}{2}\right)}}\Bigg|_{s\to-\frac{3}{2}}=\frac{-\frac{3}{2}+1}{\left(-\frac{3}{2}-2\right)^3}=\frac{-\frac{1}{2}}{\left(-\frac{7}{2}\right)^3}=\frac{4}{343}$$

$$C=\frac{s+1}{\cancel{(s-2)^3}\left(s+\frac{3}{2}\right)}\Bigg|_{s\to 2}=\frac{2+1}{2+\frac{3}{2}}=\frac{3}{\frac{7}{2}}=\frac{6}{7}$$

$f(t)$	$F(s)$	
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$	
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$	

$$s^۲ + as + b = \left(s + \frac{a}{۲}\right)^۲ + b - \frac{a^۲}{۴}$$

نصف

تعریف کانولوشن:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(x)\, f_2(t-x)\, dx$$

جای t، x بگذار

جای t، t-x بگذارید

مثال: حاصل $t * t^2$ ؟

$$\int_0^t x \times (t-x)^2\, dx = \int_0^t x\,(t^2 - 2xt + x^2)\, dx =$$

$$\int_0^t (xt^2 - 2x^2 t + x^3)\, dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2}t^2 - 2\frac{x^3}{3}t + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^t = \frac{t^4}{2} - \frac{2}{3}t^4 + \frac{t^4}{4} =$$

$$\frac{6-8+3}{12}t^4 = \frac{t^4}{12}$$

مثال: حاصل $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right]$ را به روش کانولوشن بدست آورید؟

مستقیم: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] = \frac{t^4}{4!} = \frac{t^4}{24}$

کانولوشن: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \times \frac{1}{s^3}\right] =$

$\frac{1}{s^2} \to t \qquad \frac{1}{s^3} \to \frac{t^2}{2}$

$t * \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(t * t^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{t^4}{12}\right) = \frac{t^4}{24}$

همان عبارت بالا شد.

مثال: حاصل $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} \times \frac{1}{s+2}\right]$ ؟

را به غیر از روش کانولوشن، مثال از روش تفکیک کسرها

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\times\frac{1}{s+2}\right]=$$

$$\frac{1}{s-1}\to e^{t}\qquad \frac{1}{s+2}\to e^{-2t}$$

$$e^{t} * e^{-2t}=\int_0^t e^{x}e^{-2(t-x)}\,dx=$$

$$\int_0^t e^{3x}\times e^{-2t}\,dx=$$

$$e^{-2t}\int_0^t e^{3x}\,dx=e^{-2t}\,\frac{1}{3}\,e^{3x}\Big|_0^t=$$

$$\frac{e^{-2t}}{3}\left(e^{3t}-1\right)=\frac{1}{3}\left(e^{t}-e^{-2t}\right)$$

پایداری :

مداری را پایداری گویند که اگر $t \to \infty$ مقدار ولتاژها و جریانها

∞ نشود.

مثلاً اگر جریان برابر $i = e^{2t}$ باشد، چون $t \to \infty$

$i \to \infty$ پس مدار ناپایدار است. ولی e^{-2t}

چون $t \to \infty$ ، $i = 0$ پس مدار پایدار است.

مثلاً $i = e^{-2t} \sin t$ چون $t \to \infty$ حاصل $i = 0$

پس پایدار است.

تابع $i = \sin t$ پایدار است ولی نوسانی است

تابع $\underbrace{e^{2t}}_{\text{ناپایدار}} + \underbrace{e^{-2t}}_{\text{پایدار}}$ ، ناپایدار است.

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f_1(t) f_2(t)$	$F_1(s) * F_2(s)$
$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)\, F_2(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$

$$s^2 + as + b = \left(s + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

نصف

برای اینکه ببینیم مداری پایدار است یا نه مراحل زیر لازم است:

مدار را لاپلاس کنیم $\Longrightarrow$ جریان یا ولتاژها را حساب کنیم $\Longrightarrow$ لاپلاس معکوس بگیریم $\Rightarrow$

$t \to \infty$

الآن روشی می‌گوییم که از روی لاپلاس (قبل از معکوس‌گیری) تشخیص دهیم تابعی پایدار است یا نه.

برای متوجه شدن

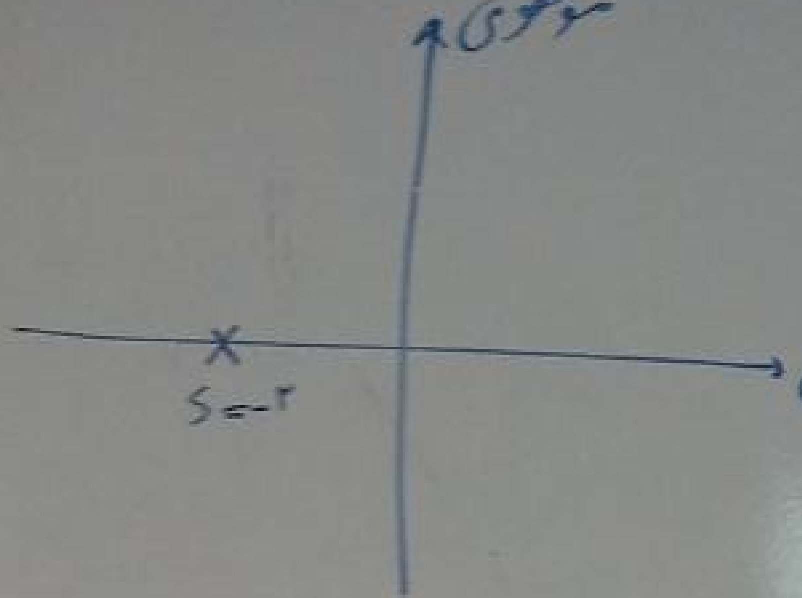
$e^{2t} \xrightarrow{\text{ناپایدار}} \frac{1}{s-2} \Longrightarrow$ ریشه مخرج $s=2$

$e^{-2t} \xrightarrow{\text{پایدار}} \frac{1}{s+2} \Longrightarrow$ ریشه مخرج $s=-2$

$\sin t \xrightarrow{\text{نوسانی}} \frac{1}{s^2+1} \Longrightarrow s=\pm i$ ریشه مخرج

$\frac{1}{s+2}$

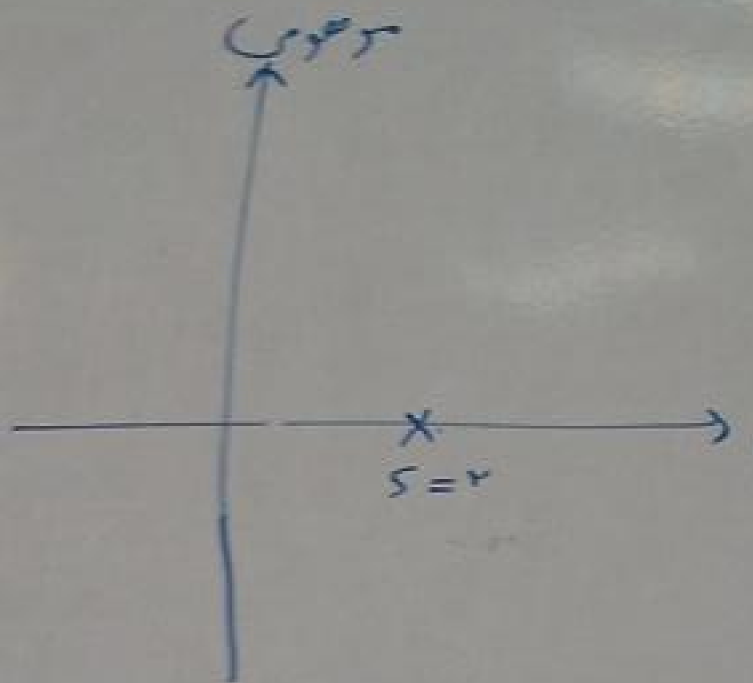
پایدار



اگر قطب‌ها سمت چپ محور موهومی باشند
تابع پایدار است

$\frac{1}{s-2}$

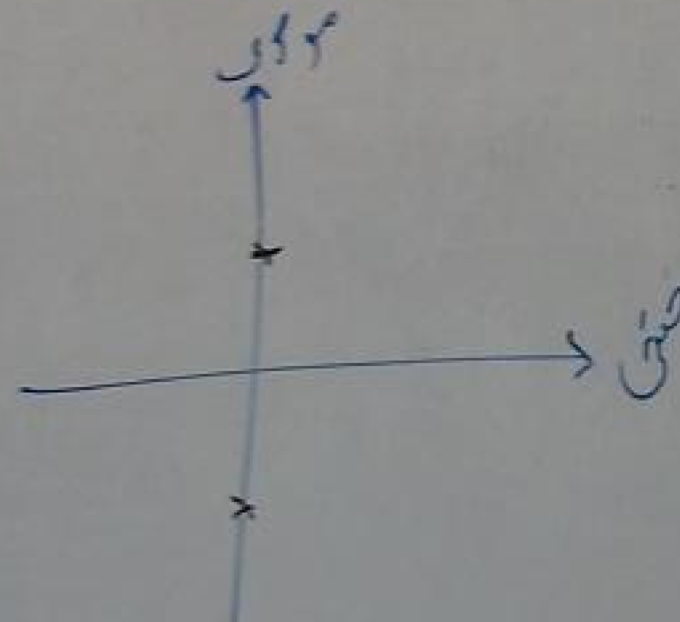
ناپایدار



اگر قطب‌های سمت راست محور موهومی
باشند ناپایدار است

$\frac{1}{s^2+1}$

نوسانی



اگر قطب‌ها روی محور موهومی
باشند
نوسانی است.

اولویت

پایدار و نوسانی و ناپایدار

ست با نه راحل

موارد را
نا پایداری کنیم } ⟹

$t \to \infty$

(قبل از معکوس گیری

$e^{2t} \xrightarrow{\text{ناپایدار}}$

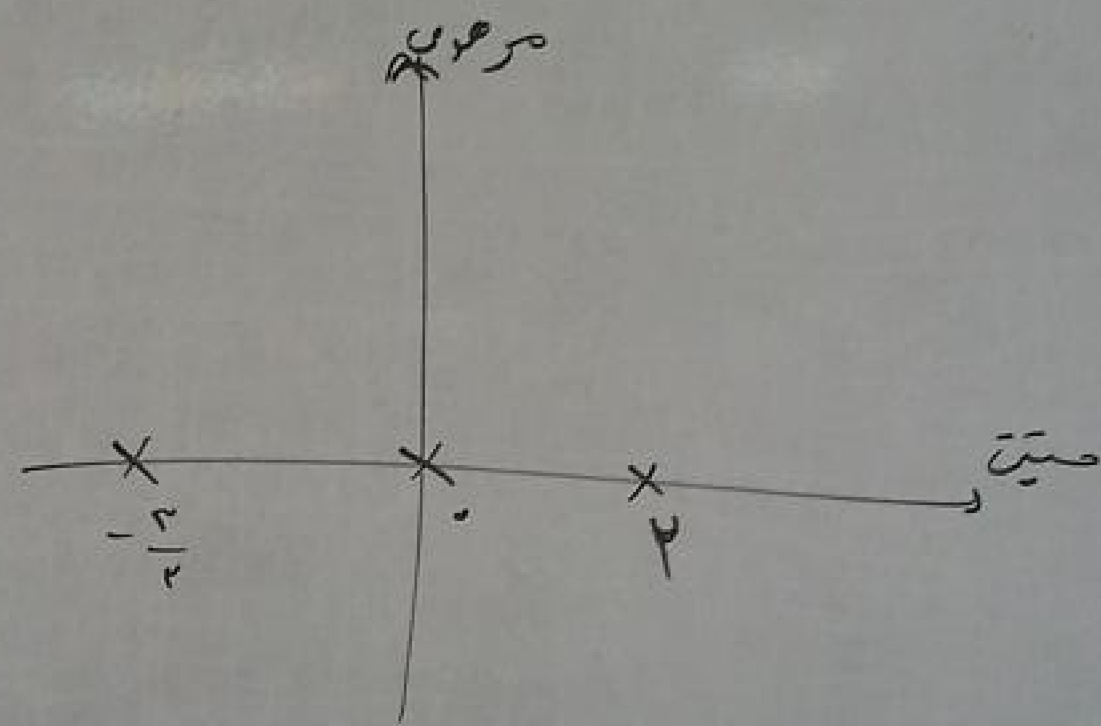
$e^{-2t} \xrightarrow{\text{پایدار}}$

$\sin t \xrightarrow{\text{نوسانی}}$

مثال: جریان i در مدار مثال قبل پایدار است یا ناپایدار یا نوسانی:

$$i = \frac{s+1}{(s-2)^3\left(s+\frac{3}{2}\right)} + \frac{1/2}{s^2\left(s+\frac{3}{2}\right)}$$

$s=2$ $\quad$ $s=-\frac{3}{2}$ $\quad$ $s=0$ $\quad$ $s=-\frac{3}{2}$



ناپایدار.

$\frac{1}{s+2}$

پایدار

$\frac{1}{s-2}$

ناپایدار

$\frac{1}{s^2+1}$